Chapitre 40

Familles sommables

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n_0 désigne un entier naturel.

I et J désignent des ensembles non vides quelconques (ce ne sont pas nécessairement des intervalles et ni même des sous-ensembles de $\mathbb{R}$).

1 Préliminaires

1.1 Introduction

Au chapitre précédent, on a étudié des séries, qui sont des objets de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$. On a notamment pu donner un sens à une somme infinie de termes non nuls, par exemple :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)} \right) = 1$$

On a ainsi décrit une somme (infinie) de tous les termes de la famille $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Les familles sommables permettent de généraliser cela à des familles indexées non pas par (une partie de) $\mathbb{N}$, mais des ensembles plus généraux. On s'intéressera donc à des objets de la forme (lorsqu'ils ont un sens)

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \qquad \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} b_{m,n} \qquad \sum_{q\in\mathbb{Q}} c_q \qquad \text{et plus généralement} \qquad \sum_{i\in I} \alpha_i$$

avec $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $(b_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$, $(c_q)_{q\in\mathbb{Q}}$ et $(\alpha_i)_{i\in I}$ des familles de réels.

1.2 Conventions

On sera amené à manipuler des quantités infinies dans les calculs. On rappelle / définit donc quelques règles de calculs sur la demi-droite réelle achevée $\left[0,+\infty\right]$:

$$\forall x \in \left[0,+\infty\right] \qquad x \leq +\infty$$

$$\begin{array}{ll} \forall x \in \left[0,+\infty\right] & x+(+\infty) = +\infty \\ \forall x \in \left]0,+\infty\right] & x \times (+\infty) = +\infty \\ & 0 \times (+\infty) = 0 \end{array}$$

Cette dernière règle ne correspond pas à l'usage, notamment pour les calculs de limites. Elle permet cependant de rendre valide certains types de calculs, cf Exemple 4.

Enfin, on généralise la notion de borne supérieure à une partie non vide A de $\mathbb{R}_+$:

$$\overline{\sup}(A) = \begin{cases} \sup(A) & \text{si } A \text{ est majorée} \\ +\infty & \text{si } A \text{ est non majorée} \end{cases}$$

⚠ La notation $\overline{\sup}$ n'est pas officielle.

1.3 Sommes finies d'une famille

Définition 40.1 – Non officiel : ensemble des sommes finies d'une famille de réels

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels. On définit l'ensemble des sommes finies de la famille $(a_i)_{i\in I}$ comme étant l'ensemble :

$$\mathrm{SF}\,(a_i)_{i\in I} = \left\{ \sum_{i\in K} a_i \;\middle|\; K \subset I, \quad K \text{ fini} \right\}$$

⚠ La notation $\mathrm{SF}\,(a_i)_{i\in I}$ n'est pas officielle.

Le sous-ensemble fini K de I est un paramètre : $\mathrm{SF}\,(a_i)_{i\in I}$ est donc de l'ensemble de toutes les valeurs obtenues lorsqu'on décide de ne sommer qu'un nombre fini des réels a_i (en choisissant lesquels).

Exemple 1.

- Si $I = \{1,2,3\}$ et $(a_1,a_2,a_3) = (1,4,9)$ alors :

$$\mathrm{SF}\,(a_i)_{i\in I} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- Si $I = \mathbb{N}$ et $(a_0,a_1,a_2,a_3,\cdots) = (1,2,4,8,\cdots)$ alors on peut montrer que :

$$\mathrm{SF}\,(a_i)_{i\in I} = \ldots\ldots\ldots$$

  tandis que

$$\mathrm{SF}\,(a_i)_{i\in\mathbb{N}^*} = \ldots\ldots\ldots$$

2 Familles sommables

2.1 Familles sommables de réels positifs

Voici la définition “officielle”, où on se sert de l'ensemble non officiel $\mathrm{SF}\,(a_i)_{i\in I}$ vu plus haut :

Définition 40.2 – Somme d'une famille de réels positifs

On suppose que $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de réels **positifs**. On appelle somme de la famille $(a_i)_{i\in I}$ la quantité

$$\sum_{i\in I} a_i := \overline{\sup}\left(\mathrm{SF}\,(a_i)_{i\in I}\right) \quad \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \tag{$*$}$$

- Si $\sum\limits_{i\in I} a_i < +\infty$, on dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable.
- Si $\sum\limits_{i\in I} a_i = +\infty$, on dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

Exemple 2. En reprenant l'exemple précédent, on a :

- Si $I = \{1,2,3\}$ et $(a_1,a_2,a_3) = (1,4,9)$ alors :

$$\sum_{i\in I} a_i = \overline{\sup}\,\{0,1,4,(\cdots),14\} = 14$$

Cela correspond bien à la somme de tous les éléments de (a_1,a_2,a_3).

- Si $I = \mathbb{N}$ et $(a_0,a_1,a_2,a_3,\cdots) = (1,2,4,8,\cdots)$, alors

$$\sum_{i\in I} a_i = \overline{\sup}(\mathbb{N}) = +\infty$$

Cela est cohérent avec le fait que $1+2+4+8+\ldots$ donne $+\infty$.

Théorème 40.3

Une famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement s'il existe un réel M (fini) tel que :

$$\text{pour toute partie } K \textbf{ finie} \text{ de } I\text{, on a :} \qquad \sum_{i\in K} a_i \leq M$$

Bien entendu, ce réel M ne doit donc pas dépendre de K. Si un tel réel M existe, alors le plus petit de ces réels est égal à la somme $\sum\limits_{i\in I} a_i$.

Démonstration. Si un tel réel M existe, alors il est clair que $\mathrm{SF}\,(a_i)_{i\in I}$ est majoré par M, donc $\overline{\sup}\left(\mathrm{SF}\,(a_i)_{i\in I}\right)$ est fini si bien que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable. Réciproquement, si la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, alors le réel $M = \sum\limits_{i\in I} a_i$ convient. $\square$

Exemple 3. Montrer que la famille $\sum\limits_{i\in\mathbb{Q}} \dfrac{1}{i^2+1}$ n'est pas sommable.

Dans le contexte des familles sommables, $\sum_{i\in I} a_i$ représente un élément de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et non pas une série... Mais il y a une ambiguité si I est de la forme $[\![n_0, +\infty[\![$...

$$\sum_{i\in[\![n_0,+\infty[\![} a_i \qquad \text{représente-t-il ...} \qquad \begin{cases} \text{la série } \sum_{i\geq n_0} a_i \quad ? \\ \text{la somme de la famille } (a_i)_{i\geq n_0} \quad ? \end{cases}$$

Dans le premier cas, c'est un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et dans le second, c'est un élément de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Dans la pratique, la notion de famille sommable n'est pas utile si $I = [\![n_0, +\infty[\![$, comme on le voit ci-dessous. C'est pourquoi cette ambiguité n'est guère gênante.

Théorème 40.4 – Cas $I = [\![n_0, +\infty[\![$

On suppose $I = [\![n_0, +\infty[\![$ et on suppose que $(a_i)_{i\in I}$, ou encore $(a_n)_{n\geq n_0}$, est une famille de réels **positifs**. La famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{n\geq n_0} a_n$ converge. De plus, si c'est le cas, on a alors :

$$\underbrace{\sum_{i\in[\![n_0,+\infty[\![} a_i}_{\text{somme de la famille sommable}} \qquad = \qquad \underbrace{\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n}_{\text{somme de la série } \sum_{n\geq n_0} a_n}$$

Démonstration. On ne montrera que l'équivalence et non l'égalité ci-dessus. Pour simplifier on suppose $I = \mathbb{N}$.

- Si la famille est sommable, alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour toute partie K finie de $\mathbb{N}$, on a
$$\sum_{i \in K} a_i \leq M$$
En particulier, en posant $K = [\![0, N]\!]$ avec $N \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{i \in K} a_i = \sum_{i=0}^{N} a_i \leq M$$
Or, $\sum_{i=0}^{N} a_i$ est la somme partielle de la série $\sum a_i$. Comme on a majoré la somme partielle d'une série à termes positifs, on en déduit que la série $\sum a_i$ converge.

- Réciproquement, on suppose que la série $\sum a_i$ converge. On va vérifier la caractérisation ci-dessus avec $M = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i$. Soit K une partie finie de $\mathbb{N}$. Alors il existe N' tel que $K \subset [\![0, N']\!]$ (il suffit de prendre $N' = \max K$ si K est non vide, et $N' = 0$ si K est vide). Comme la série est à termes positifs, on en déduit que
$$\sum_{i \in K} a_i \leq \sum_{i=0}^{N'} a_i \leq \sum_{i=0}^{+\infty} a_i = M$$
donc la famille est sommable.

□

Notation. Soit $\sum a_n$ une série à termes **positifs**. On donne un sens plus large à l'écriture $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ de la manière suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \begin{cases} \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k & \text{si } \sum a_n \text{ converge} \\ +\infty & \text{si } \sum a_n \text{ diverge} \end{cases}$$

Seul le second cas est une nouveauté. Le réel $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ qui représentait jusqu'alors la somme de la série $\sum a_n$ en cas de convergence, représentera plus généralement la somme de la famille $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ au sens de la Définition 40.2.

Exemple 4. On peut écrire : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (car $\frac{1}{n}$ est positif !).

2.2 Famille sommable de nombres réels ou complexes

Définition 40.5

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels ou complexes. On dit que la famille $(a_i)_{i \in I}$ est <u>sommable</u> si la famille $(|a_i|)_{i \in I}$ est sommable.

Ainsi, si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque, on ne peut écrire "$\sum_{i \in I} a_i$" qu'après avoir justifié que la famille est bien sommable. La seule exception étant lorsque I est de la forme $[\![n_0, +\infty[\![$, où l'écriture $\sum_{i \in I} a_i$ représente $\sum_{n \geq n_0} a_n$, c'est-à-dire une série.

Théorème 40.6 – Cas $I = [\![n_0, +\infty[\![$

Soit $(a_n)_{n \geq n_0}$ une famille de nombres réels ou complexes. La famille $(a_n)_{n \geq n_0}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{n \geq n_0} a_n$ est ACV.

Le parallèle avec les séries devient plus ambigu : on devrait en fait parler "d'absolue sommabilité", tout comme on parle d'absolue convergence pour les séries.

Théorème 40.7

- Si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de réels, alors (a_i) est (absolument) sommable ssi les familles $(a_i^+)_{i\in I}$ et $(a_i^-)_{i\in I}$ sont sommables. De plus, si c'est le cas, on définit la somme de la famille $(a_i)_{i\in I}$ comme le réel :
$$\sum_{i\in I} a_i := \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^-$$
- Si $(a_j)_{j\in I}$ est une famille de complexes, alors (a_j) est (absolument) sommable ssi les familles $(\mathrm{Re}\, a_j)_{j\in I}$ et $(\mathrm{Im}\, a_j)_{j\in I}$ sont sommables. De plus, si c'est le cas, on définit la somme de la famille $(a_j)_{j\in I}$ comme le complexe :
$$\sum_{j\in I} a_j := \sum_{j\in I} \mathrm{Re}\, a_j + i \sum_{j\in I} \mathrm{Im}\, a_j$$

2.3 Propriétés de base

Théorème 40.8 – Linéarité

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ des familles sommables et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors la famille $(\lambda a_i + \mu b_i)_{i\in I}$ est sommable et
$$\sum_{i\in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i$$
(sous la convention $0 \times (+\infty) = 0$).

La convention $0 \times (+\infty) = 0$ est nécessaire lorsque $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$ et que les sommes en question sont infinies, par exemple :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(0 \times \frac{1}{n}\right) = 0 \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 0 \times (+\infty) = 0$$

Théorème 40.9 – Comparaison

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de complexes. On suppose que
$$\forall i \in I \qquad |a_i| \leq |b_i|$$

- Si $(b_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable.
- Si $(a_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, alors $(b_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.

Exemple 5. La famille $\left(\frac{1}{i^2+1}\right)_{i\in\mathbb{R}}$ n'est pas sommable. En effet, en posant :
$$a_i = \begin{cases} \dfrac{1}{i^2+1} & \text{si } i \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
on a pour tout **réel** i l'inégalité $a_i \leq \frac{1}{i^2+1}$. Or, on a vu à l'Exemple 3 que la famille $\sum_{i\in\mathbb{Q}} \frac{1}{i^2+1} = +\infty$. Ainsi, on vérifie facilement que $\sum_{i\in\mathbb{R}} a_i = +\infty$. La famille $(a_i)_{i\in\mathbb{R}}$ n'est donc pas sommable, et donc $\left(\frac{1}{i^2+1}\right)_{i\in\mathbb{R}}$ ne l'est pas non plus.

3 Théorèmes fondamentaux des familles sommables

3.1 Familles à double indice

Quelques familles sommables (ou non) qu'on étudie ont deux indices : elles peuvent par exemple être indexées par $\mathbb{N}^2$ et donc s'écrire sous la forme $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$, ou plus généralement $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$.

Théorème 40.10 – Théorème de Fubini

Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de complexes. On suppose qu'on est dans l'un des deux cas suivants :

- Pour tous i, j, les nombres $a_{i,j}$ sont réels et positifs.
- La famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable.

Alors on peut choisir librement l'ordre de sommation :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right)$$

En particulier, si $I = J = \mathbb{N}$, on peut réécrire la conclusion ainsi :

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$$

L'hypothèse de positivité ou de sommabilité est essentielle pour intervertir.

Exemple 6. Calculer $S = \sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ (ou encore $S = \sum_{p=2}^{+\infty}(\zeta(p)-1)$...).

Il arrive parfois que la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ puisse se réécrire de manière à découpler les indices i et j :

$$a_{i,j} = b_i c_j$$

Dans ce cas, on peut se ramener à étudier séparément les familles (b_i) et (c_j) voire à les sommer le cas échéant :

Théorème 40.11 – Cas où $a_{i,j}$ est de la forme $b_i c_j$

Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ telle que $a_{i,j} = b_i c_j$ avec $(b_i)_{i\in I}$ et $(c_j)_{j\in J}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{K}$. On suppose qu'on est dans l'un des deux cas suivants :

- Pour tous i, j, les nombres b_i et c_j sont réels et positifs.
- Les familles $(b_i)_{i\in I}$ et $(c_j)_{j\in J}$ sont sommables. Dans ce cas, on obtient que la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable.

Dans les deux cas, on a l'identité suivante :

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} b_i c_j = \left(\sum_{i\in I} b_i\right)\left(\sum_{j\in J} c_j\right) \qquad \text{avec la convention } 0\times(+\infty) = 0$$

Exemple 7. Montrer que la famille $\left(\dfrac{\sin(m-n)}{m^2n^2}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable

3.2 Série commutativement convergente

Définition 40.12 – Série commutativement convergente

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ une série de complexes. On dit que cette série est <u>commutativement convergente</u> si pour toute application $\sigma : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ **bijective**, la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_{\sigma(n)}$ converge.

Autrement dit, une série est commutativement convergente si elle converge peu importe l'ordre dans lequel on somme les termes. En particulier, avec $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, on remarque que toute série commutativement convergente est nécessairement une série convergente. Toutefois, la réciproque est fausse :

Exemple 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 1} a_n$ est convergente. Montrer cependant qu'elle n'est pas commutativement convergente (*une telle preuve ne fait pas partie des attendus du programme et sera en partie informelle*).

Résolution de l'exemple. La série $\sum a_n$ est série alternée et comme la suite $(|a_n|)_{n \geq 1} = \left(\dfrac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ est positive, décroissante et tend vers 0, alors par le théorème des séries alternées, la série $\sum\limits_{n \geq 1} a_n$ est convergente. Montrons qu'elle n'est pas commutativement convergente. On remarque que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2N-1} - \frac{1}{2N} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k}\end{aligned}$$

Or, comme la série harmonique diverge, on vérifie que

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k-1} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2k} = +\infty$$

$\square$

Théorème 40.13 – Convergence commutative – Cas général

Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de complexes. Si la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable (ou encore si $\sum a_n$ est ACV), alors la famille $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable (ou encore la série $\sum a_{\sigma(n)}$ est ACV) et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Théorème 40.14 – Convergence commutative – Cas positif

Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de réels **positifs**. On a (sans condition) la formule :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Si la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs n'est pas sommable, alors l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ devient $+\infty = +\infty$.

Exemple 9. Pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}$ converge tandis que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$ diverge.

3.3 Théorème de sommation par paquet

Théorème 40.15 – Sommation par paquets – cas général

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de l'ensemble I et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- La famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(a_i)_{i\in I_n}$ est sommable et la série $\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{i\in I_n} a_i\right)$ est convergente.

Si l'une de ces assertions est vérifiée, alors on a la formule : $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} a_i\right)$

Théorème 40.16 – Sommation par paquets – cas positif

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de l'ensemble I et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels **positifs**. On a (sans condition) la formule :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} a_i\right)$$

Si la famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels positifs n'est pas sommable, alors l'égalité ci-dessus devient $+\infty = +\infty$: cela signifie que la série de terme général $\sum\limits_{i\in I_n} a_i$ diverge (vers $+\infty$).

Exemple 10. Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{(m+n)^2}\right)_{m,n\in(\mathbb{N}^*)^2}$ n'est pas sommable.

3.4 Produit de Cauchy

Définition 40.17

Soit $\sum_{k\geq 0} a_k$ et $\sum_{k\geq 0} b_k$ deux séries à termes quelconques. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

La série $\sum_{n\geq 0} c_n$ est appelée produit de Cauchy des séries $\sum_{k\geq 0} a_k$ et $\sum_{k\geq 0} b_k$.

Théorème 40.18

Soit $\sum_{k\geq 0} a_k$ et $\sum_{k\geq 0} b_k$ deux séries ACV. Alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\geq 0} c_n$ (avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$) est une série ACV et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \right)$$

Exemple 11. On considère la série $\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k (n-k+1)(n-k+2)} \right)$. Montrer que cette série converge et calculer sa somme.

4 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour vérifier si une famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, on peut :

- Se souvenir que cela équivaut à ce que la famille $(|a_i|)_{i\in I}$ est sommable, qui est une famille de réels positifs (donc on peut utiliser les différents résultats qui obéissent à ce cadre !)
- Si $I = [\![n_0, +\infty[\![$, étudier l'absolue convergence de la série $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$ qui est équivalente à la sommabilité de la famille $(a_n)_{n\in I}$.
- Si $I = [\![n_0, +\infty[\![$ et que la série $\sum\limits_{n\geq n_0} a_n$ peut s'écrire comme un produit de Cauchy, utiliser le résultat associé.
- Réécrire a_i en $b_i + c_i$ et chercher si les familles $(b_i)_{i\in I}$ et $(c_i)_{i\in I}$ sont sommables.
- (Rarement) chercher une autre famille $(b_i)_{i\in I}$ pour laquelle on a $|a_i| \leq |b_i|$ ou $|b_i| \leq |a_i|$ et utiliser le résultat de comparaison.

Méthode

Pour vérifier si une famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable, on peut :

- Si $a_{i,j}$ est de la forme $b_i \times c_j$, étudier la sommabilité de $(b_i)_{i\in I}$ et de $(c_j)_{j\in J}$.
- Si $a_{i,j}$ est de la forme $f(i+j)$, utiliser une sommation par paquets en fonction des valeurs possibles de $i+j$. Cette méthode peut se généraliser à d'autres situations, comme $f(\alpha i + \beta j)$, etc.